

Miror och O-C diagram

I det här dokumentet vill jag dokumentera några av de tankar och erfarenheter jag fått i mitt arbete med min databas över mirors maxima, O-C diagram och analys av periodförändringar hos mirorna. Mycket är en dokumentation för mig själv, men jag försöker skriva så att den som har en del bakgrund inom astronomi och matematik förhoppningsvis ska kunna hänga med. Texten kommer antagligen att bli rätt spretig och hoppa mellan olika aspekter av det jag gjort, men tyngdpunkten kommer att ligga på periodanalys av mirorna.

Hur databasen kom till. 2009 byggde jag webbsiten SVO för rapportering av svenska variabelobservationer. Andra variabelorganisationer brukar göra årsrapporter eller sammanställningar av sina observationer och 2011 tänkte jag testa om det gick att göra med materialet i SVO. Bl.a. blev jag inspirerad av SAAF/V föregångare SVSO (*Scandinavian Variable Star Observers*) och deras rapporter. Av materialet som fanns i SVO tyckte jag att maximum för miror passade bäst. Jag märkte snabbt att det var ett stort jobb att läsa av alla ljuskurvor manuellt och konstruerade därför ett program i Visual Basic som läste in observationer och bestämde datum och magnitud för maxima. Mer om programmets funktion finns i artikel jag skrev i JAAVSO (se Referenser sist i det här dokumentet). Det blev inte så mycket av årliga rapporter med maxima från SVO, istället har jag två gånger om året gjort fasdiagram och periodberäkningar utifrån materialet i SVO. I dagsläget finns det 115 fasdiagram.

Arbetet med programmet hade ändå tänt en idé. Jag märkte att materialet i SVO var för tunt för att få långa heltäckande serier av maxima. Jag byggde därför om programmet så det också kunde läsa filer från först AAVSO och sedan också från variabelorganisationerna AFOEV, VSOLJ och BAA/VSS och laddade hem data för en mängd miror. De miror som programmet spottade ut minst 20 maxima för kom sedan med i databasen. Efter detta började jag leta efter än äldre data. På *SAO/NASA Astrophysics Data System* finns en mängd astronomiska tidsskrifter och artiklar fritt tillgängliga som jag har sökt igenom efter uppgifter om maxima som jag skrev av och la in i databasen. I tredje steget upptäckte jag att AAVSO också fortlöpande publicerar uppgifter om maxima/minima på en undanskymd sida på sin webb. Dessa uppgifter importerades också och fyllde i många luckor mitt program hade lämnat. I fjärde steget, som pågår, hämtar jag observationer från DASCH, ett projekt på Harvard där de skannar in sitt enorma arkiv av glasplåtar och publicerar de ingående stjärnornas magnituder. Detta är ett mycket bra material för de miror som inte har så lång observationshistoria inom AAVSO. Hittills har DASCH släppt 6 datareleaser av planerade 12.

Vad innehåller databasen? Den innehåller observerade datum för mirastjärnors maximum, tidpunkten för maximal ljusstyrka under dess cykel. Tidpunkterna är dels i vanligt format (ÅÅÅÅ-MM-DD) och dels som Julianskt datum, JD. JD är en löpande dagräkning som löper sedan 1:a januari 4713 f.Kr. och gör det mycket lättare att räkna på sådant som perioder. Databasen innehåller också stjärnans magnitud vid max för maxima från mitt program och från AAVSO. Magnituder från äldre artiklar och DASCH är ofta angivna i fotografisk (p) magnitud och inte jämförbara med de visuella och V-magnituder som används i databasen. Det finns också fält för maximumets löpnummer, beräknat datum för max utifrån stjärnans periodelement och skillnaden mellan observerat och beräknat datum (O-C). Mer om O-C senare.

I efterhand inser jag att det skulle ha varit användbart att även ha med uppgifter om mirornas minima. Man skulle då ha kunnat göra fler analyser, till exempel hur amplituder varierar över tid eller hur stora de stigande och avtagande faserna är i förhållande till hela cykeln. Man får komma ihåg att det inte fanns någon plan bakom databasen från början utan den växte fram ganska ostrukturerat. Mycket av den kunskap jag fått genom arbetet saknade jag när den bör-

jade byggas upp. Det skulle vara möjligt att i efterhand komplettera med uppgifter om minima men den arbetsinsats jag ser framför mig har gjort att jag avstått. Det är också så att det finns mycket färre uppgifter om minima i litteraturen med undantag för förteckningen av maxima/minima från AAVSO där fördelningen är jämn. Så serierna med minima skulle ha mycket större luckor än serierna med maxima. Det känns också som att osäkerheten vid minima både för tidpunkt och magnitud skulle bli mycket större än för maxima då de flesta stjärnor är mindre, eller inte alls, observerade under sin svaga fas.

När detta skrivs i mars 2019 finns det 65700 maxima för 499 miror i databasen. Längden mellan första och sista maximum är i genomsnitt 129 år och varierar mellan 43 och 420 år (omi Cet). AAVSO:s förteckning innehåller ca 49000 maxima för 390 långperiodiska variabler. AAVSO:s lista innehåller även en del halvregelbundna variabler som inte finns med i min databas.

Jag undrar om det finns andra samlingar med äldre miramaxima? På observatorierna i Tyskland och Ryssland, som gav ut GuL respektive GCVS, borde det ha funnits kortregister eller liknande med uppgifter om alla variabler i deras publikationer. Finns dessa kvar i något arkiv? Jag har dock inte hittat något som är tillgängligt på nätet.

Vad kan databasen användas till? I första hand är den nog mest användbar för olika typer av periodberäkningar. I viss mån går den också att använda för att se hur ljusa de ingående stjärnorna är vid maximum och hur ljusstyrkan varierar vid maximum. Medelmagnitud vid max samt lägsta och högsta maxmagnitud presenteras på webbsidorna med O-C diagram från databasen. Magnituderna i databasen kan dock skilja en del från vad man normalt skulle bedöma genom att titta på ljuskurvorna. Detta på grund av att mitt program använder en teknik med en medelljuskurva för respektive stjärna som passas in ovanpå de enskilda maximumen. Den avlästa magnituden är där toppen av medelljuskurvan hamnar när den passats in ovanpå ett maximum. Om ett enskilt maximum är spetsigare än medelljuskurvan kan den verkliga magnituden vara högre än den angivna. På samma sätt kan den verkliga magnituden vara lägre än i databasen för ett enskilt maximum om det är flackare än medelljuskurvan. Länkar till medelljuskurvorna finns under Referenser sist i det här dokumentet.

Min första tanke med databasen var att jämföra eller kanske korrigera perioderna som fanns i GCVS (*General Catalogue of Variable Stars*). Det var också spännande om det skulle dyka upp en mira med tydliga periodförändringar. Tyvärr hittade jag ingen ny med lika stora och tydliga förändringar som de åtta som redan var kända (R Hya, R Aql, R Cen, T UMi, W Dra, Z Tau, BH Cru och LX Cyg). För medelperioderna upptäckte jag att de jag fick kunde skilja en hel del från uppgifterna i GCVS. Skillnaden beror oftast på att den medelperiod jag beräknat är baserat på alla stjärnans maxima medan GCVS verkar använda maxima bara några decennier bakåt från sin valda startepok. Om stjärnan har variationer i sin period kan perioden i GCVS råka vara beräknad under en fas då perioden var kortare eller längre än medelperioden.

Vad är en Mira? Mirastjärnorna är pulserande röda jättestjärnor. Inte att förväxla med röda superjättar som är betydligt tyngre. Mirorna har en massa ungefär som solens, man brukar uppskatta att vikten ligger i spannet 0,6 till 2 solmassor. Det är stjärnor som är i slutet av sina liv och har gjort slut på nästan allt sitt bränsle. Solen kan bli en mira om några miljarder år. Efter mirafasen räknar man med att stjärnan kommer att kasta av sig hela sitt yttre lager så att bara den heta kärnan återstår och bli en vit dvärg.

Stjärnan har gjort slut på allt sitt väte i kärnan (huvudseriefasen), sedan gått igenom en fas där den använt helium i kärnan som bränsle. Nu består kärnan i huvudsak av kol och syre, som är avfallet från heliumförbränningen. Stjärnans massa är dock för låg för att använda grundäm-

nen högre än helium som bränsle, det blir inte tillräckligt hög temperatur och tryck i kärnan. Stjärnan får istället sin energi från förbränning av väte i ett tunt skal runt kärnan. Förbränningstakten är dock högre än någonsin i stjärnans historia. Den höga energiproduktionen och omfördelningen av massa och förbränningsområde får till följd att stjärnans yttre lager trycks utåt och förtunnas. I John Percys bok *Understanding Variable Stars* står att radien för en mira uttryckt i solradier är i paritet med dess period och kan nå till jordbanans radie eller mer. Kärnan där nästan all massa finns samlad är i sammanhanget mycket liten. Percy nämner storleksförhållandet som en vindruva placerad i mitten av en idrottsarena.

Man räknar med att tiden som mira i stjärnans liv är en eller ett par miljoner år. En kort period om man jämför med huvudseriefasen som kan vara tio miljarder år. Miror benämns också astrofysikaliskt som AGB-stjärnor (*Asymptotic Giant Branch*) efter sin plats i HR-diagrammet.

Det som mest utmärker mirorna för en variabelist är deras stora ljusväxling, från 2,5 magnituder, enligt definition, till uppåt 10 magnituder. Ljusväxlingen beror på att stjärnan pulserar, då både dess radie och temperatur ändras. Pulseringen drivs av en skillnad i genomskinlighet mellan neutralt och joniserat väte. Neutralt väte i stjärnans yttre skikt är mer ogenomskinligt och håller inne strålning från centrum. Detta får till följd att tryck och temperatur byggs upp och pressar det yttre lagret utåt. När temperaturen stigit så mycket att vätet joniseras blir det mer genomskinligt och den uppdämda strålningen kan slippa ut. Detta gör att det yttre skiktet svalnar och faller inåt samtidigt som det joniserade vätet åter blir neutralt väte. Cykeln kan börja på nytt.

Mirornas ljusväxling är extra stor i visuella våglängder, den är inte alls lika markant i infrarött där det största energiutflödet finns. Detta beror på att skillnaden i temperatur och genomskinlighet mer påverkar de visuella våglängderna. Genomskinligheten påverkas också starkt av metalloxider som TiO (titanoxid) som bildas och bryts ner under cykeln. TiO, som används i solskyddsmedel, absorberar visuellt ljus bra. Metalloxidernas varierande halt under cykeln förstärker därför ljusvariationen.

Pulseringstiden är i första hand proportionell mot stjärnans radie och i andra hand mot stjärnans massa. Miror med kort period är alltså mindre och lättare än de med lång period.

Vädet som förbränns i ett skal runt kärnan producerar helium som restprodukt. När en tillräckligt stor mängd helium byggts upp kan detta antändas och för en kort tid dramatiskt förändra energiproduktionen. Man räknar med att en sådan så kallad *helium shell flash* eller *thermal pulse* varar från några hundra upp till tusen år och inträffar med 50000 till 100000 års intervall. En TP-händelse orsakar att material från kärnan förs upp till stjärnans yttre lager, s.k. *dredge-up*, vilket på sikt kan ändra stjärnan spektraltyp (från M via S till C). En TP ökar också takten i stjärnans massförlust. En takt som redan är mycket högre i mirafasen jämfört med huvudseriefasen.

Vilka fenomen går att observera i mirornas period? Ett utmärkande drag för miror är att de är hyfsat, men inte helt, regelbundna. För enskilda cykler kan amplituden skilja över en magnitud och längden flera veckor jämfört med ett medelvärde. För perioden har man noterat följande tre komponenter:

1) Perioden varierar slumpmässig cykel till cykel runt en medelperiod. Åtskilliga försök har, utan framgång, gjorts att hitta cykliska eller andra mönster i hur perioden varierar hos olika miror. Den bästa modellen idag verkar vara att det finns en slumpmässig komponent i de enskilda cyklernas längd. Detta mönster finns hos alla miror i större eller mindre grad. Det är

inte så konstigt om man tänker på stjärnans enorma volym att vissa kaosartade beteenden kan förekomma.

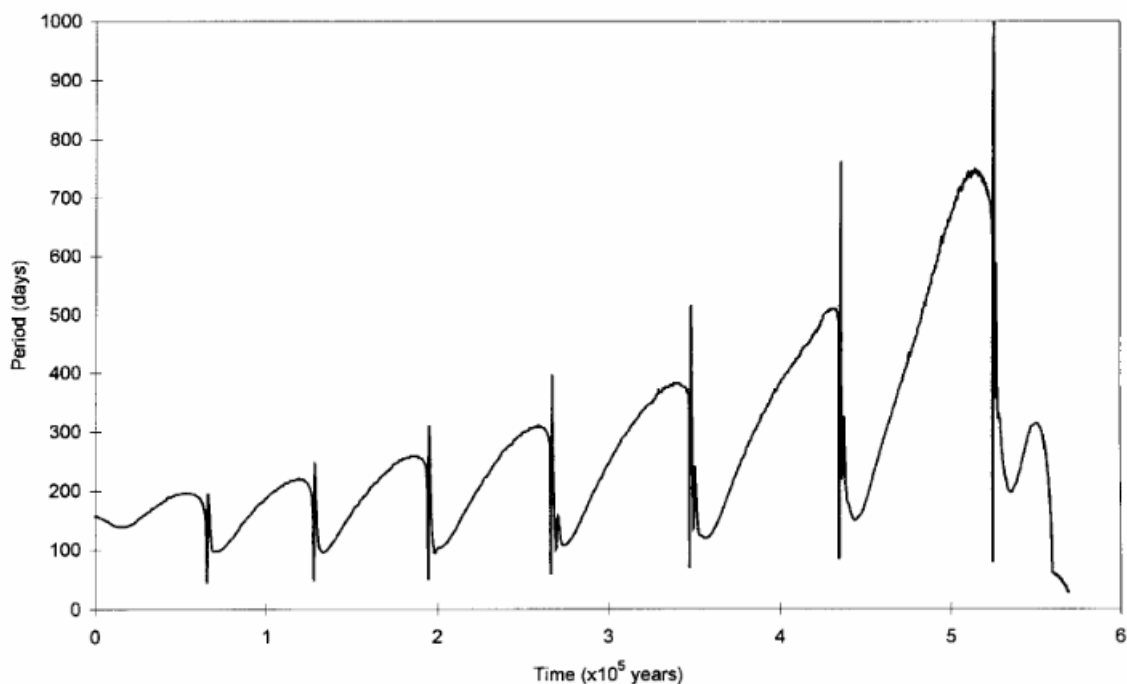
2) En del miror har ett beteende där perioden varierar kraftigare än vad som kan förklaras av slumpen. Typiskt så ökar eller minskar perioden under 20-60 cykler för att sedan gå åt andra hållet igen. Variationen är 5-10 % av medelperioden. Miror med detta beteende kallas meandrande. Vad jag vet har man inte inom forskningen kommit fram till någon samstämmighet om vad som orsakar fenomenet, även om olika teorier finns. Enligt Zijlstra och Bedding är 15 % av mirorna med en period över 400 dagar meandrande. Det verkar finnas två underkategorier i den här gruppen. Dels miror som RU Tau där växlingen mellan två ytterlighetsvärden sker jämnt och regelbundet, dels miror som Z Sco där perioden ändras på ett mer oregelbundet sätt.

3) Åtta miror har långsiktiga och bestående förändringar av sin period. Förändringen av perioden kan antingen vara gradvis över stjärnans hela observationshistoria eller ske plötsligt efter att tidigare varit stabil. I den första kategorin finns W Dra som har en ökande period samt R Aql, Z Tau, R Hya och R Cen som har en minskande period, de två sista dock med en del avbrott och ojämnheter. Plötsliga förändringar har setts hos T UMi där perioden minskade kraftigt 1970-2000, LX Cyg som haft en kraftig ökning av perioden 1970-2000 och BH Cru där perioden också ökat kraftigt. För BH Cru visar ny data från DASCH att periodökningen 1970-2000 föregicks av en liknande händelse 1920-1950.

Vilka fenomen borde teoretiskt kunna finnas i mirornas period? Eftersom mirafasen är relativt kort bör det vara möjligt att se evolutionära förändringar som återspeglar sig i de observerade perioderna. Enligt en teoretisk modell för AGB-stjärnor av Wood och Zarro ska en *thermal pulse* orsaka att perioden ökar och minskar i snabb följd. Det har föreslagits att en TP skulle vara orsaken till periodändringarna hos de åtta mirorna ovan. Rent statistiskt bör en mira vara i en TP-fas under cirka 1 % av sin tid som AGB-stjärna. Därför borde man se TP-symptom hos 1 % av de observerade mirorna, detta stämmer rätt väl med vad som observerats.

Instabiliteter i stjärnorna, t.ex. i konvektionszonerna, och förändring av halterna av olika ämnen i stjärnornas yttre lager har också föreslagits kunna påverka perioden. Både LX Cyg och BH Cru verkar ha förändrat sin spektralklass under sin snabba periodökning, från klass SC till CS. Detta innebär att halten av kol har ökat och blivit högre än halten av syre. Varför detta skulle få perioden att öka har jag inte hittat ut. En annan stjärna av denna typ (SC till CS) skulle kunna vara VX Aql, tyvärr finns inte tillräcklig observationshistoria för denna stjärna för att se hur eller om perioden har ändrats.

Som nämndes tidigare är mirornas period i första hand kopplad till deras radie, men även deras massa. Efter hand som stjärnan åldras bör radien öka och så även perioden. Visserligen har miror ett stort massutflöde så att stjärnans massa minskar, vilket borde få motsatt effekt på perioden, men ökningen av radien har en större verkan. En annan effekt är de regelbundna TP-faserna som rejält ändrar perioden. I bilden nedan visas periodens utveckling för en mira med en solmassa enligt en teoretisk modell från Vassiliadis och Wood 1993. I den ser man att perioden mellan varje *thermal pulse*, de lodräta strecken i grafen, gradvis ökar och att den efter en TP snabbt återställs till en lägre nivå. Om denna modell stämmer, vilket kanske inte är helt säkert, borde man för normala miror som inte är i en TP-fas kunna notera att perioden sakta ökar.

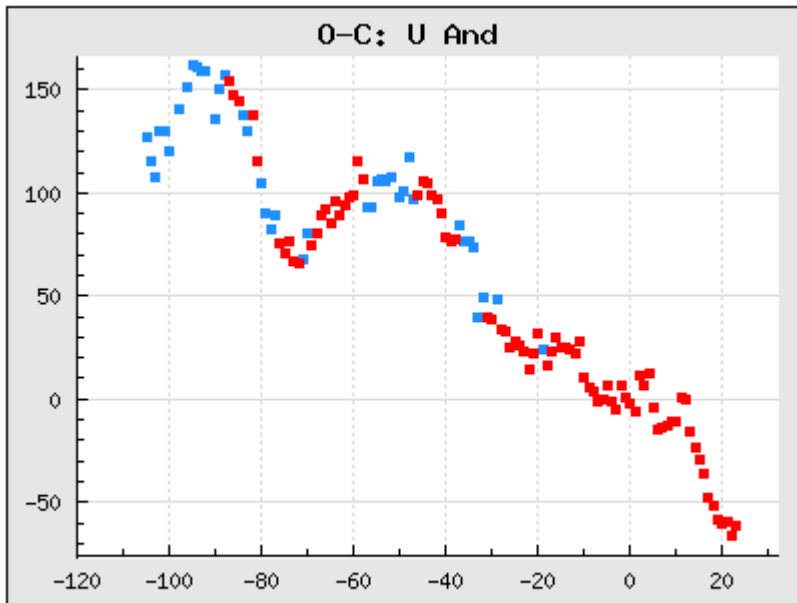


Det har varit detta som varit huvudfokus i min analys av de data jag samlat om miror. Att undersöka evolutionära förändringar av perioden för "normala" miror som inte verkar vara i en TP-fas eller påverkade av att deras spektralklass ändras.

Det som gör analysen svår är att denna eventuella förändring är så oerhört liten i förhållande till mirornas slumpmässiga och meandrande beteende. Den långsiktiga förändringen kan vara i storleksordningen 0,001 till 0,005 dagar/cykel medan den slumpmässiga variationen kan vara 3-10 dagar/cykel. Dock har den slumpmässiga variationen ingen riktning vilket den långsiktiga har. Observerar man en mira tillräckligt länge bör därför en långsiktig periodändring märkas även om den är liten. Hur lång tid det kan ta kommer att tas upp mer längre fram.

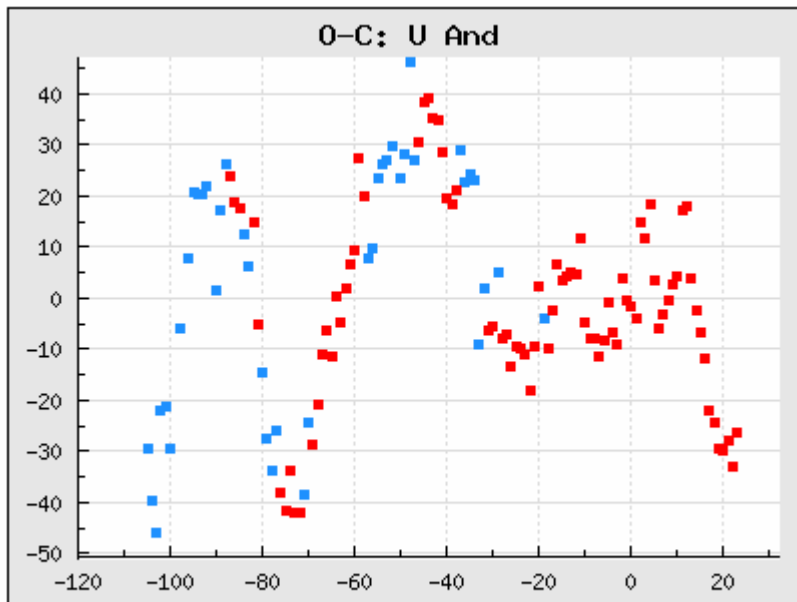
Vad är och hur används O-C diagram? O-C tekniken kan användas inom flera områden där man studerar cykliska förlopp. Här kommer jag att specifikt ta upp hur jag använt O-C diagram för att visualisera innehållet i databasen och analysera periodförändringar hos mirorna. I mitt fall visar O-C diagrammen tiden på x-axeln i form av maximumens löpnummer (E). På y-axeln visas skillnaden mellan observerad (O) och beräknad (C, Computed) tidpunkt för maximum, uttryckt i dagar. Med hjälp av diagrammet kan man avgöra om den antagna perioden verkar korrekt och också se förändringar eller variationer i perioden genom att se hur den observerade tidpunkten över tid skiljer sig från den beräknade.

För att beräkna O-C värden måste man först ha en modell för de beräknade tidpunkterna. I modellen antar jag att perioden är konstant och beräknar då: $Max = Epok + E * P$. Där epok är ett godtyckligt datum då maximum inträffat, E är ett positivt eller negativt heltal och P stjärnans period. Epok och P har jag hämtat från GCVS4. I flera fall har det visat sig att epok och P från GCVS4 inte stämmer så bra, i alla fall inte sett till hela stjärnans observationshistoria. Även om dessa uppgifter inte stämmer har det visat sig vara praktiskt att ha konstanta värden på epok och P när jag arbetat med att samla in uppgifter om maxima, så jag slipper numrera om och beräkna nya O-C värden varje gång jag lägger till ett nytt maximum. När O-C diagrammen sedan publiceras på webben sker dock en automatisk omräkning av period och epok. Så här ser ett O-C diagram ut från webbsidan med P och epok från GCVS4, ett där den antagna perioden verkar vara för hög.



GCVS period: 347.7, GCVS epoch: 2449564 [LC](#) [Avg](#) [Per](#)
 $\Delta P: -1.5 \pm 0.05$ (t:29.6, $r^2:0.877$) $\Delta Epoch: -0.4$

den observerade tiden för maximum efter hand inträffar allt tidigare jämfört med perioden från GCVS4 på 347,7 och att denna är för hög. För att få ett bättre värde på epok och P lägger jag in en rät trendlinje i diagrammet som anpassas till punkterna enligt minsta kvadratmetoden. Ekvationen för trendlinjen är: $O-C = a * E + b$. Man kan direkt använda koefficienterna a och b för att justera P och epok genom: $P_{ny} = P + a$ och $Epok_{ny} = Epok + b$. Det är koefficienterna a och b som står under diagrammen som ΔP och $\Delta Epoch$. Ett nytt diagram med justerade värden på epok och P ser ut så här:



Mean period: 346.20, Mean epoch: 2449563.6 [LC](#) [Avg](#) [Per](#)
 $\Delta P: -1.5 \pm 0.05$ (t:29.6, $r^2:0.877$), $\Delta Epoch: -0.4$

Varje prick i diagrammet är alltså ett maximum och för U And finns det maximum som sträcker sig 105 cykler före och 23 cykler efter startepoken, JD 2449564 (1994-07-30). Någon kanske undrar över färgerna på prickarna i diagrammen. De talar om källan för maximumet. Röda är de jag beräknat med mitt program, ljusblå är publicerade av AAVSO och mörkblå publicerade av någon annan.

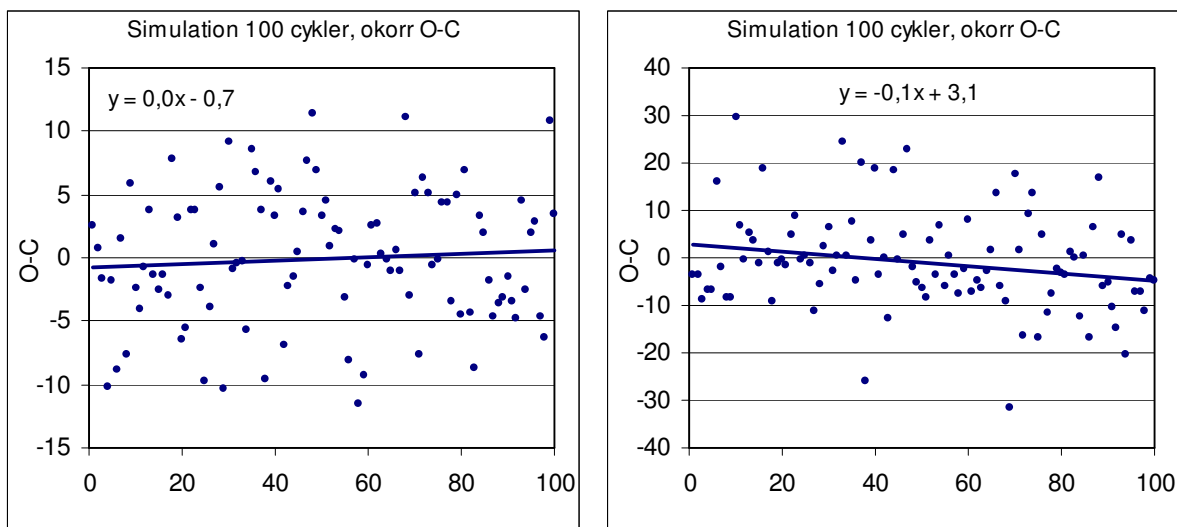
Man ser att kurvan går lite upp och ner, men mest ner över tid. Detta innebär att

Diagrammet visar samma data som ovan, O är samma, men C har räknats om genom att P och epok har justerats med -1,5 respektive -0,4. Om man infogar en trendlinje i detta diagram sammanfaller den med x-axeln. Man ser nu tydligare hur tidpunkten för de observerade maxima varierar över tid. Ibland inträffar maximum 45 dagar före och ibland 45 dagar efter schemat. Med stor sannolikhet är det inte äkta periodförändringar man ser här utan effekter av mirans slumpvisa variationer.

Hur ser mirornas olika variationer ut i ett O-C diagram? Jag har jobbat en hel del med simulering av O-C diagram för att få en bättre förståelse för hur olika variationer avspeglas i O-C diagrammen. Vid en simulering styr man själv de underliggande parametrarna, som hur stora de slumpmässiga variationerna är eller hur stor en konstant ökning av perioden är. Genom att upprepa samma simulering tusentals gånger kan man få ett statistiskt underlag att jämföra mot de riktiga stjärnorna.

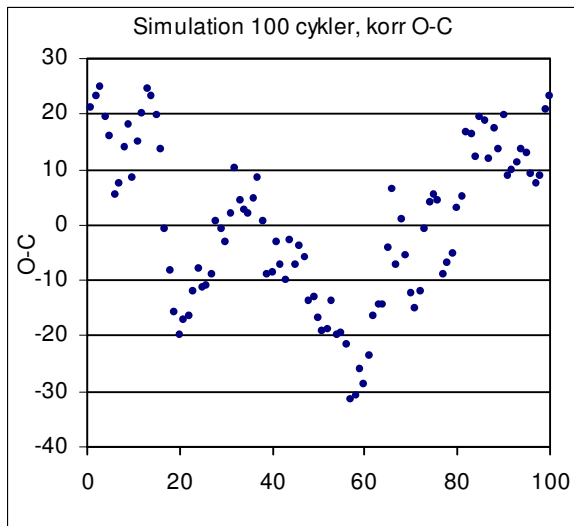
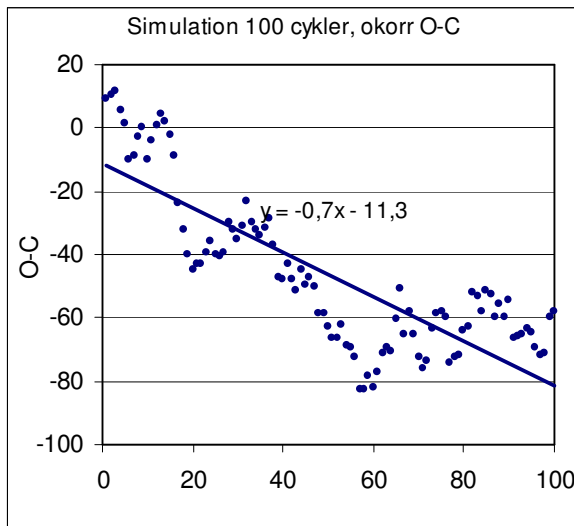
Först en effekt som inte nämndes ovan och som inte är en egenskap hos stjärnan. Det är felet i avläsningen när maximum inträffar. Även om ett maximum är välobserverat kan det vara svårt att bestämma den exakta tidpunkten. Om man t.ex. anpassar en polynomkurva till observationerna får man ofta lite olika värden för var maxpunkten hamnar beroende på kurvans polynomgrad. För de äldre maxima är underlaget i många fall mycket litet och man har interpolerat maxpunkten bara från ett fåtal observationer. Detta gör att man får räkna med att tidpunkterna i databasen har ett fel jämfört med den "riktiga" tidpunkten. Felet yttrar sig som ett brus och gör kurvan i O-C diagrammet lite luddig. Enstaka punkter åker upp och ned, men detta är ett lokalt fel som inte fortplantar sig till nästa max. Jag kallar detta fel avläsningsfel.

Här är resultatet av två simuleringar där det finns ett slumpmässigt avläsningsfel i varje cykel. Felet är normalfördelat med i vänstra diagrammet en standardavvikelse på 5 dagar och i det högra 10 (notera de olika skalorna på y-axeln). Ingen annan effekt finns med i simuleringen och man kan se att trendlinjen ligger nästan parallellt med x-axeln, dvs. den observerade tidpunkten håller sig nära den beräknade. I det högra diagrammet verkar det dock utifrån trendlinjen som perioden borde vara 0,1 dagar lägre. Detta stämmer alltså inte utan är i det här fallet ett spel av slumpen.



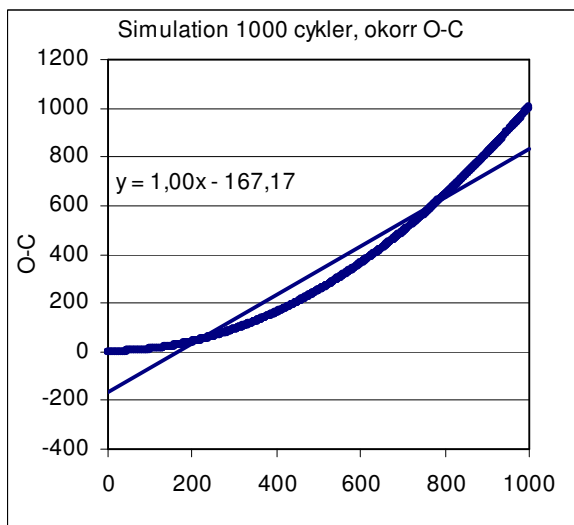
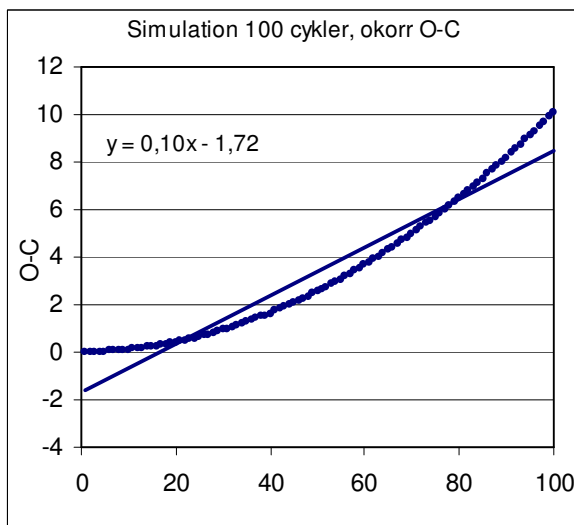
För de riktiga mirorna tror jag att det här felet vanligtvis ligger under 7 dagar för de flesta.

I nästa diagram finns inget avläsningsfel alls utan istället finns en slumpvis och normalfördelad variation av cykelns längd med standardavvikelsen 6 dagar. Medelvärde av variationen är noll, så den underliggande perioden är den samma hela tiden, 300 dagar. Trendlinjen i det vänstra diagrammet visar dock att perioden borde justeras med -0,7 dagar. I mina O-C diagram på webben som visar innehållet i databasen är det som jag nämnde ett standardförfarande att anpassa perioden efter diagrammet. Detta är gjort i det högra diagrammet som visar samma data som det vänstra fast med perioden justerad till 299,3 dagar.

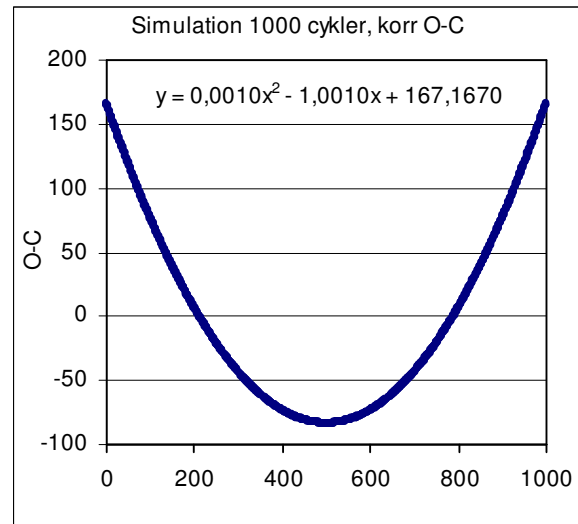
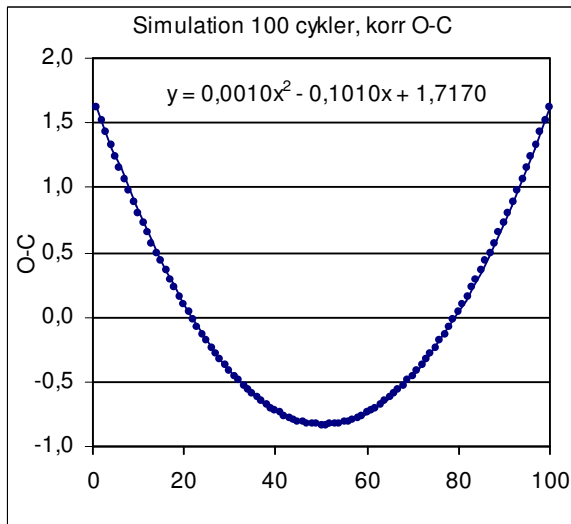


I det här fallet gjorde slumpen att perioden tycktes vara kortare än den i verkligheten är, det kunde lika gärna ha varit åt andra hållet.

I nästa exempel är den enda effekten en konstant ökning av perioden med 0,002 dagar per cykel. Diagrammen visar situationen för 100 respektive 1000 cykler. Kurvorna ser väldigt lika ut men titta på skalan på y-axeln. 10 gånger så många cykler ökar O-C värdet med $10 * 10 = 100$, alltså kvadraten. Detta är en typisk egenskap hos O-C diagram, en konstant förändring av perioden ger en parabolisk kurva och är något man ofta letar efter.



Man ser i ekvationerna för trendlinjerna att den antagna medelperioden borde vara 0,1 respektive 1 dag längre. Som vanligt subtraheras den linjära trenden bort och då får man följande diagram där jag också har lagt in en parabolisk trendlinje. Denna följer punkterna i diagrammet så väl att den nästan inte syns.



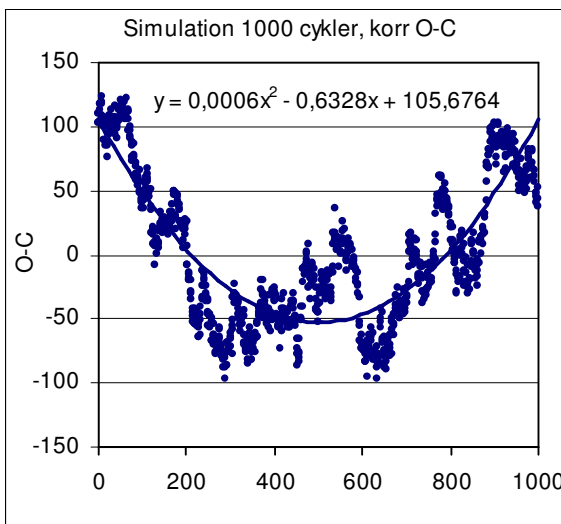
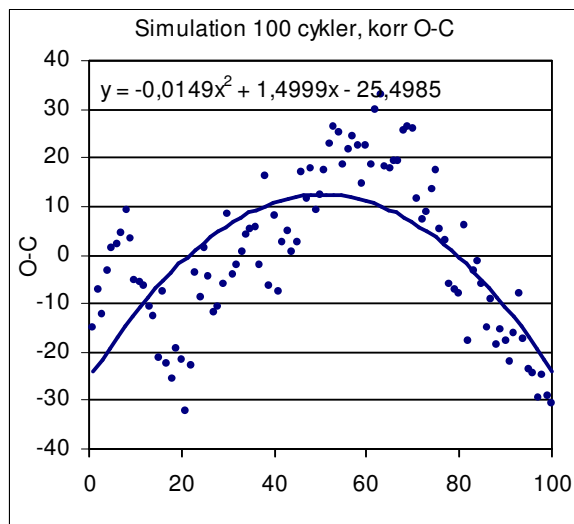
Från den paraboliska trendlinjen kan man få fram en annan viktig egenskap hos O-C diagram. Genom att multiplicera x^2 koefficienten med 2 får man den genomsnittliga kontinuerliga förändringen perioden har. I det här fallet $2 * 0,001 = 0,002$, vilket ju var värdet jag använde i simuleringen.

Man kan också jämföra formen på kurvan i dessa diagram med det högra ovan där jag hade lagt in en slumpmässig variation. Med lite god vilja ser det också ut att ha en parabolisk form, dessutom med en mycket högre amplitud i O-C värdena än 100 cykler med den lilla kontinuerliga ökningen av 0,002 dagar/cykel.

Det är denna egenskap som gjort att O-C tekniken råkat lite i vanrykte, eller i alla fall inte ses som så användbar bland många forskare. Slumpen är väldigt bra på att lura hjärnan, har man börjat se paraboliska kurvor i O-C diagrammen ser man dem snart överallt fastän de i de allra flesta fall bara är en slumpvandring. Mer data och längre serier är vad man alltid önskar sig i de fallen. Flera gånger har jag haft stjärnor som varit lovande kandidater som stjärnor med förändringar men där nyupptäckt äldre data helt har förändrat bilden. Jag har ändå valt att använda O-C tekniken i min analys, dels för att den är lätt att använda och dels för att den passar till materialet i databasen. För många av de äldre maxima är den enda uppgift som finns tidpunkten för maximum och då är det svårt att använda andra metoder som t.ex. bygger på att man analyserar de enskilda observationerna.

Den slumpvisa variationen gör att det aldrig går att få fram den "rätta" perioden för en mira att använda i O-C diagrammen, utan man är hänvisad till medelperioden för den mätserie man har. En medelperiod som av slumpen kan vara lite lägre eller högre än den "rätta". Hade man kunnat veta stjärnans exakta period vid ett givet tillfälle skulle det varit mycket lättare att se små långsiktiga förändringar. Jämför amplituden av O-C värdena i de fyra diagrammen ovan. I de två första användes perioden vid cykel 1 och i de två sista medelperioden för hela mätserien. Anpassningen av O-C diagrammen till medelperioden har dessutom ofta en tendens att ge en slumpvandring en V-liknande eller parabolisk form.

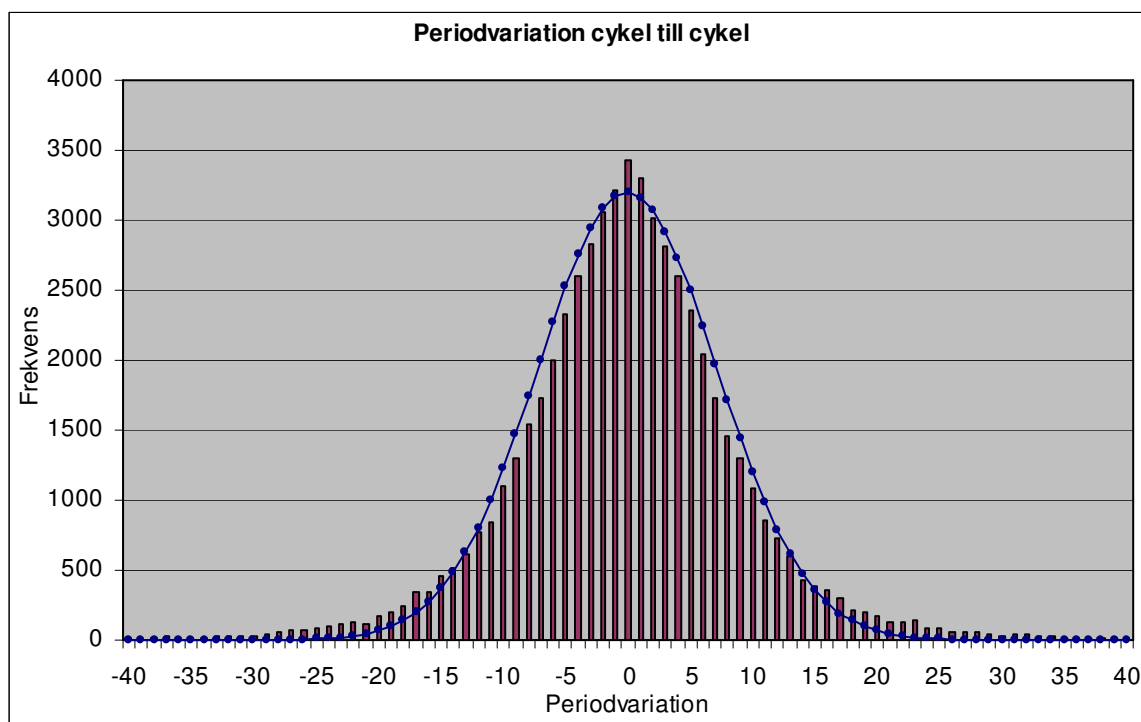
I nästa exempel finns alla tre effekterna med, ett avläsningsfel på 4 dagar, en slumpmässig variation av perioden med 3 dagar samt en konstant ökning med 0,002 dagar/cykel. Det vänstra diagrammet visar de 100 första cyklerna i detalj från diagrammet med 1000 till höger. Om man bara hade haft tillgång till de 100 första cyklerna för den här miran skulle man kunna dra den felaktiga slutsatsen att perioden minskar då parabolkurvan pekar nedåt. Efter ytterligare 900 cykler pekar parabolkurvan uppåt vilket stämmer med att perioden ökar hela tiden, men kurvan är långt ifrån jämn och frågan är i vilken mån man kan lita på resultatet bara genom att se på kurvan?



Det är här simuleringen kommer in. Genom att slumpa fram många tusen O-C diagram med samma parametrar går det att få en uppfattning om sannolikheten för att en periodökning som visas i diagrammet verkligen är riktig. Min simulering visar för det här fallet att sannolikheten att diagrammet visar en ökning av perioden efter 100 cykler bara är 57 %, och alltså att det är 43 % chans att det felaktigt visar en periodminskning. Det visar sig att det behövs cirka 700 cykler innan man kan vara nästan 100 % säker på att en liten ökning på 0,002 dagar/cykel slår igenom bruset från en slumpvariationen på 3 dagar/cykel. Det vill säga att diagrammet visar en ökning när det verkligen finns en underliggande ökning. Dock behöver storleken av denna inte vara rätt. Det högra diagrammet ovan visar en periodökning av $2 * 0,006 = 0,0012$, 40 % av den verkliga på 0,002.

Man kan fundera på om denna typ av simuleringar överhuvudtaget säger något om de riktiga mirorna. Man får komma ihåg att det i simuleringen inte finns några som helst kopplingar till fysikaliska processer i stjärnorna. Bara empiriska iakttagelser om hur mirorna verkar uppföra sig. Även det sista är förenklat i simuleringen då jag inte har tagit med några meandrande egenskaper. Miror är väldigt komplicerade system och det finns t.ex. inget som säger att en eventuell förändring av perioden måste ske i en jämn och konstant hastighet som i simuleringen. Med detta sagt har jag ändå tyckt det varit intressant och värt att gå vidare med att jämföra simulerade och riktiga O-C diagram.

I simuleringen har jag antagit att slumpvariationen är normalfördelad. Därför kan det vara intressant att se hur fördelningen av cykel till cykel-variationen bland de riktiga mirorna ser ut. Staplarna i nästa diagram visar frekvensen av skillnaden i cykellängd mellan alla par av intilliggande maxima för alla miror i min databas med undantag av de åtta med stora kända periodförändringar. I diagrammet har jag också lagt in en normalfördelningskurva med standardavvikelsen 7,2 som är det värde som bäst passar till staplarna. Även om passningen inte är helt perfekt tycker jag att man med fog borde kunna använda en modell med normalfördelad slumpvariation vid simulering.



Andra sätt att analysera periodförändringar. Jag skrev en artikel i JAVSO 2014 där jag använde några andra tekniker för att hitta små långsiktiga förändringar i mirornas period. Idén kom från en annan artikel från 1998 av Percy och Au där de hade använt AAVSO:s samling av maxima och minima till O-C diagram och räknat hur många stjärnor som hade en positiv och negativ x^2 -koefficient. En positiv x^2 -koefficient betyder ju en ökande period och en negativ minskande. De fann att 55 % av stjärnorna (inte alla i AAVSO:s lista är miror) hade en ökande period.

Jag gillade detta tillvägagångssätt. Att dra slutsatser av enskilda miror är som jag antytt svårt, men att se på dem på gruppnivå borde vara lättare. Om det finns en liten ökning av perioden som drunknar i stora slumpmässiga cykel till cykel-varianter bör den ändå gå att se statistiskt om man tittar på tillräckligt många stjärnor. Min databas passade dessutom mycket bra till denna typ av analys då den innehåller både fler miror och går längre tillbaka i tiden än AAVSO:s samling.

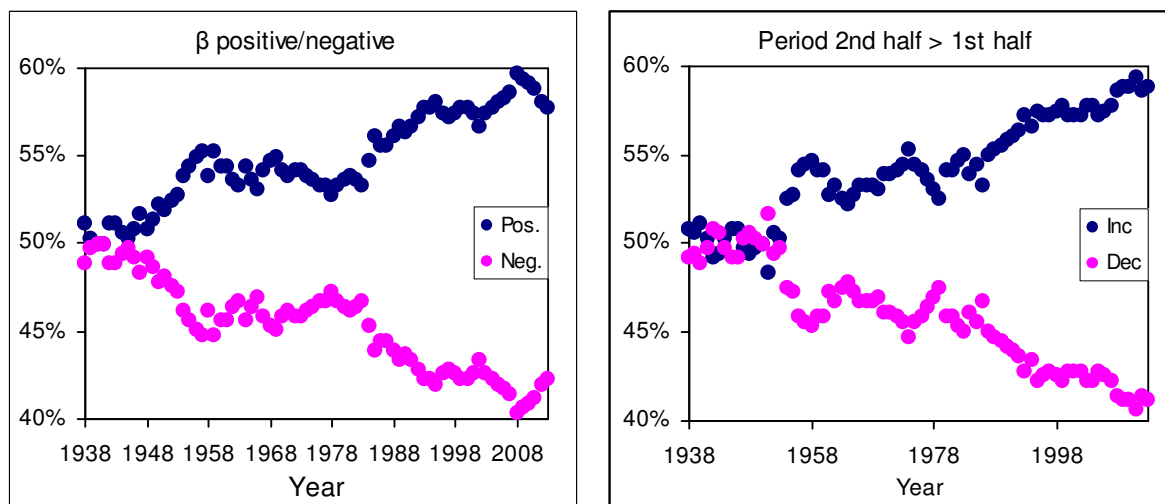
Jämfört med Percy och Aus artikel använde jag också några ytterligare tekniker i analysen. Som jag visade i O-C diagrammet på sidan 10 är antalet cykler avgörande. En förändring av perioden, hur liten den än är, kommer alltid att bryta igenom bruset från slumpvariationen om den får tillräckligt lång tid på sig. Det kommer att vara skillnad mellan vad man ser med dagens data och data för ytterligare några hundra eller tusen år framåt i tiden, på samma sätt som det var skillnad i simuleringen mellan 100 och 1000 cykler. Jag kom på att denna effekt kanske kunde gå att se även med dagens data om man plockade bort år istället för att lägga till. Jag tänkte att om man utgick ifrån situationen 75 år bakåt i tiden, hur skulle den skilja sig ifrån situationen idag? Detta var 2014 och jag hade då data till och med 2012, så startår fick bli 1938. Jag bortsåg från all data efter 1938 och tog med miror som hade minst 20 maxima före 1938, sammanlagt 362 stycken, och gjorde tre test på dem.

1) Anpassade en parabolkurva i O-C diagrammet och räknade hur många som hade en positiv respektive negativ x^2 koefficient. Alltså om de utifrån O-C diagrammet hade en ökande eller minskande period. Detta var samma metod som Percy och Au använt.

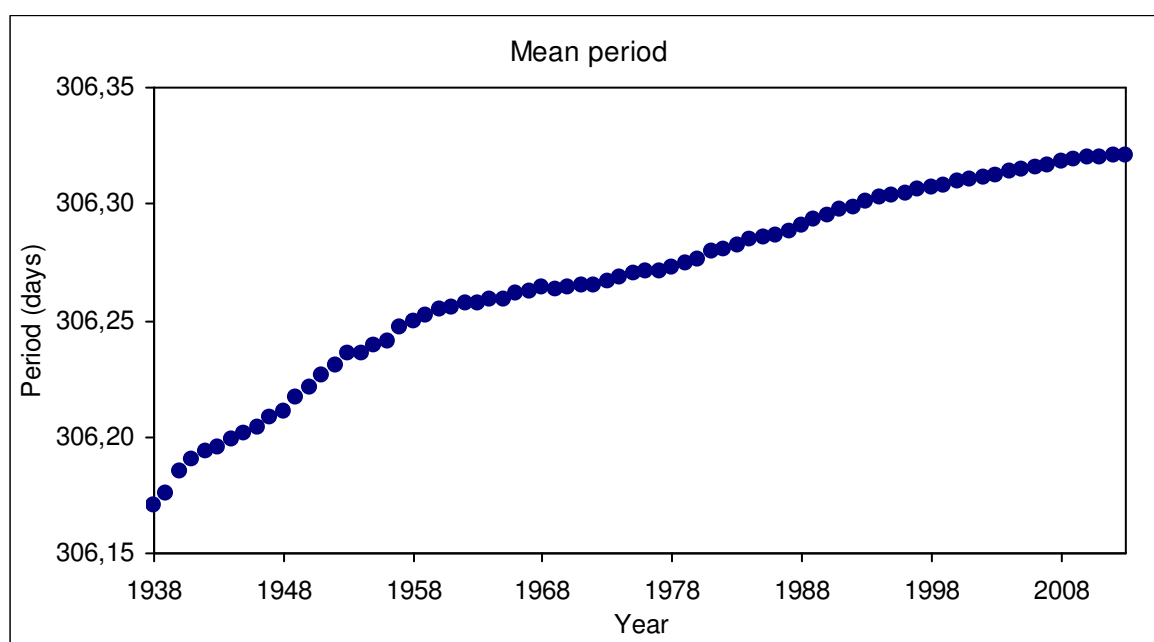
2) Delade vare stjärnas serie av maxima i två lika delar tidsmässigt och beräknade medelperioden för den första och andra hälften. Sedan räknade jag hur många som hade en högre respektive lägre period för den andra halvan.

3) Räknade ut medelperioden för stjärnan från alla maxima fram till valt år och sedan medelvärdet av alla perioder jag fick på detta sätt.

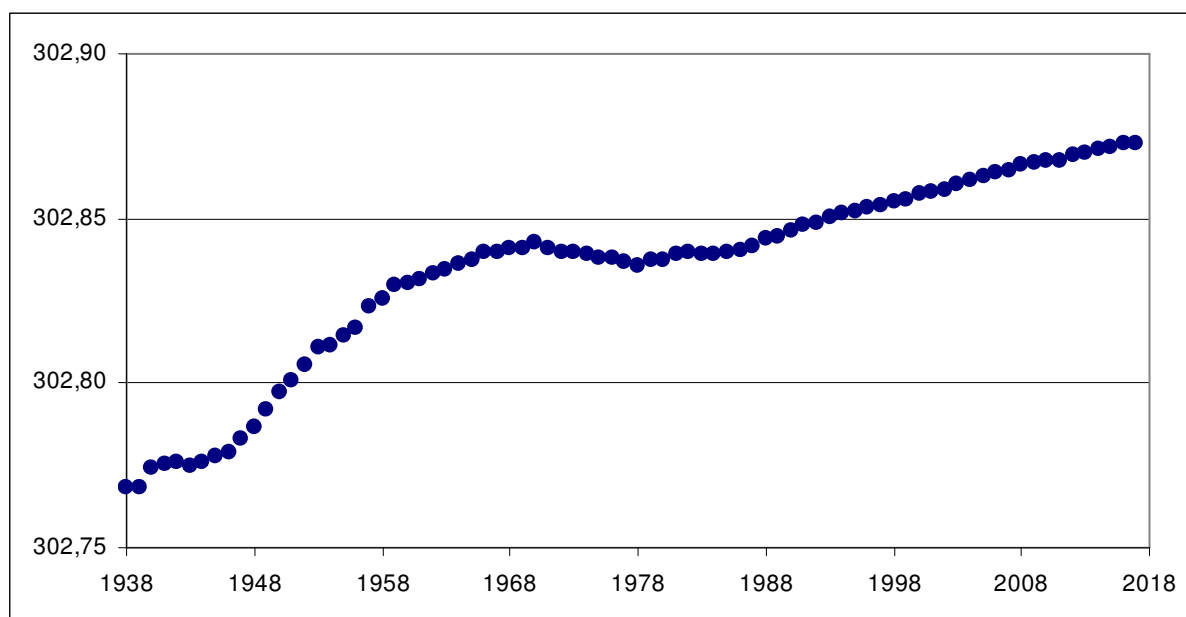
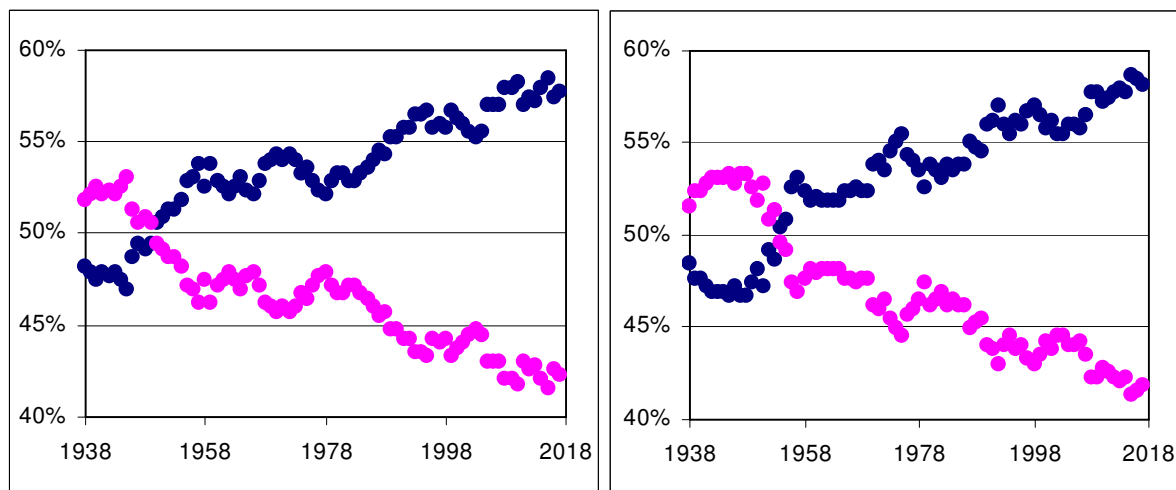
Jag lade sedan till data för ett år i taget och gjorde om beräkningen 75 gånger, eller rättare jag lät datorn göra beräkningarna. Det jag hoppades var se en viss utveckling över tid då allt mer data lades till. Resultatet blev riktigt bra och det var väldigt roligt och intressant att se kurvorna växa fram.



Diagrammet till vänster visar resultatet från test 1 och det till höger det från test 2. Som man ser var det hälften av stjärnorna som hade en ökande period 1938. Med ytterligare 75 års data har nästan 58 % en ökande period. Diagrammet nedan visar medelperiodens utveckling under de 75 åren från test 3. Lite beroende på hur man räknar fick jag den genomsnittliga periodökningen till mellan 0,0025 och 0,0030 dagar/cykel.



Jag har sedan fortsatt att uppdatera de här beräkningarna när mer data kommit in i databasen. Med fler äldre maxima från DASCH har fler miror kvalificerat sig att vara med i undersökningen. Sedan artikeln skrevs har jag också lagt in nyare maxima för 2013-2016. I min senaste uppdatering var det 409 miror som var med i underlaget, 47 fler än i den ursprungliga artikeln och samma diagram ser nu ut så här.



Med fler stjärnor och längre tidsserier i underlaget har slutsatsen att miror har långsiktig ökning av perioden inte blivit tydligare, snarare tvärtom. Med det nuvarande underlaget var det år 1940 fler miror som hade en minskande än ökande period, jämfört med lika andel i artikeln. För 2018 är dock andelen som har en ökande period ungefär densamma som i artikeln, 58 %. Den genomsnittliga periodökningen har också sjunkit, med det större underlaget är den nu mellan 0,0016 till 0,0019 dagar/cykel.

Jag hade en förhoppning att mer data skulle ge ett tydligare resultat, men det är ju inte så vetenskap fungerar, den bryr sig inte om mänskliga förhoppningar. Trots att resultatet blivit lite oklarare med mer data är det ändå mycket som tyder på att hypotesen med ökande perioder håller, men ännu mer data och än längre serier behövs för att styrka den så mycket att den blir ett faktum.

Betydelsen av den slumpmässiga variationens storlek. Som jag varit inne på tidigare är storleken av den slumpmässiga cykel till cykel-variationen av stor betydelse för att rätt kunna upptäcka en liten kontinuerlig periodförändring. Å andra sidan är storleken av den kontinuerliga periodförändringen också av stor betydelse. Om denna är stor, som fallet är för R Aql med -0,4 dagar/cykel, blir den snabbt uppenbar fastän stjärnan även har en slumpmässig variation i samma storleksordning som andra miror.

I mitt simuleringsprogram har jag försökt att ta reda på hur många cykler man behöver observera en mira med en viss storlek på den slumpmässiga variation och konstanta förändringen för att kunna säkerställa periodförändringen. Följande fyra tabeller är resultatet av dessa simuleringar. De visar hur många cykler som minst behövs för att nå en sannolikhet av 1, 2, 3 respektive 4 standardavvikelse (σ , sigma).

Sigmabegreppet används inom statikområdet för att bedöma sannolikheten för en normalfördelad händelse. Genom att slumpa fram en mängd O-C diagram med ett visst värde på en konstant periodförändring och en slumpmässig variation fick jag fram ett medelvärde för periodförändringen och dess standardavvikelse. Periodförändringens medelvärde hamnar naturligtvis väldigt nära det värde jag stoppade in i simuleringen, men mer intressant är standardavvikelsen och dess storlek i förhållande till periodförändringen. Om till exempel periodförändringens standardavvikelse är hälften av periodförändringen betyder det att det är en sannolikhet på 2σ att en stjärna med ett O-C diagram som visar en ökande period verkligen har ökande period. Det behövs en avvikelse på mer än 2 standardavvikelse för att en positiv χ^2 -koefficient ska bli negativ. I det här fallet är det frågan om en så kallad ensidig (*one-tailed*) fördelning och 1σ motsvarar då en sannolikhet av 84,1 %, 2σ 97,7 %, 3σ 99,9 % och 4σ 99,997 %.

Kolumnerna visar en konstant förändring i dagar/cykel. Raderna visar storleken på en normalfördelad slumpmässig variation i dagar. Tabellcellerna visar antalet cykler som minst behövs för att nå upp till respektive sannolikhet. Där det står 25 ska det i de flesta fall vara <25.

Cyklar som behövs för 1σ

	0,001	0,002	0,005	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1	2	5
1	275	160	95	55	40	25	25	25	25	25	25	25
2	425	250	140	90	60	40	25	25	25	25	25	25
3	550	350	190	115	75	45	40	25	25	25	25	25
4	650	425	225	145	90	50	40	25	25	25	25	25
5	750	475	275	170	105	60	40	25	25	25	25	25
6	900	550	325	190	115	65	40	40	25	25	25	25
8	>1000	650	350	225	140	80	50	40	25	25	25	25
10	>1000	800	425	275	170	95	55	40	25	25	25	25
12	>1000	850	475	300	190	105	65	45	25	25	25	25
15	>1000	1000	550	350	225	120	75	50	40	25	25	25

Cykler som behövs för 2 σ

	0,001	0,002	0,005	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1	2	5
1	425	275	140	90	60	40	25	25	25	25	25	25
2	650	425	225	140	90	50	40	25	25	25	25	25
3	900	550	325	190	115	65	40	40	25	25	25	25
4	>1000	650	350	225	145	80	50	40	25	25	25	25
5	>1000	800	425	275	170	90	55	40	25	25	25	25
6	>1000	850	475	300	190	100	65	45	25	25	25	25
8	>1000	>1000	600	375	250	125	75	50	40	25	25	25
10	>1000	>1000	650	400	275	140	90	60	40	25	25	25
12	>1000	>1000	750	475	300	170	100	65	40	25	25	25
15	>1000	>1000	850	550	350	190	115	75	40	40	25	25

Cykler som behövs för 3 σ

	0,001	0,002	0,005	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1	2	5
1	550	350	190	120	75	40	40	25	25	25	25	25
2	850	550	300	190	115	65	40	40	25	25	25	25
3	>1000	700	400	250	160	85	55	40	25	25	25	25
4	>1000	850	450	300	190	100	65	45	25	25	25	25
5	>1000	1000	550	350	225	120	75	50	40	25	25	25
6	>1000	>1000	650	400	250	135	85	55	40	25	25	25
8	>1000	>1000	750	475	300	160	100	65	40	25	25	25
10	>1000	>1000	900	550	350	190	115	75	40	40	25	25
12	>1000	>1000	950	650	400	210	130	85	45	40	25	25
15	>1000	>1000	>1000	750	450	250	160	100	55	40	25	25

Cykler som behövs för 4 σ

	0,001	0,002	0,005	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1	2	5
1	650	425	225	140	90	50	<40	<40	<40	<40	<40	<40
2	>1000	650	375	225	140	80	50	<40	<40	<40	<40	<40
3	>1000	850	450	300	190	105	65	40	<40	<40	<40	<40
4	>1000	>1000	600	350	225	125	80	50	<40	<40	<40	<40
5	>1000	>1000	650	425	275	140	90	60	<40	<40	<40	<40
6	>1000	>1000	750	475	300	170	105	65	<40	<40	<40	<40
8	>1000	>1000	900	600	375	200	125	80	45	<40	<40	<40
10	>1000	>1000	>1000	650	425	225	145	95	50	<40	<40	<40
12	>1000	>1000	>1000	750	475	275	160	100	55	<40	<40	<40
15	>1000	>1000	>1000	850	550	300	190	115	65	40	<40	<40

Som framgår är det stor skillnad i hur många cykler som behövs för att nå upp till en viss sannolikhet beroende på hur stor den slumpmässiga variationen är. För att kunna utnyttja de här tabellerna måste man därför kunna uppskatta storleken av denna för enskilda mirror, mer om detta i nästa avdelning. Det kan också vara på plats att återigen påpeka att tabellerna är resultatet av en mycket förenklad och idealiserad modell av en mira där de enda komponenterna i perioden är en slumpmässig variation och en jämn kontinuerlig förändring.

Eddington & Plakidis metod. 1929 publicerades en artikel med titeln "*Irregularities of period of long-period variable stars*" av Arthur Eddington och Stavros Plakidis där de undersökte långperiodiska variabler med O-C tekniken och presenterade en analysmetod. Tesen de hade var att om fluktuationerna i en variabelstjärnas period är helt slumpmässig beskriver O-C diagrammet en slumpvandring (*random walk*) och då går det att utnyttja en egenskap hos slumpvandringen för att visa att det är slumpen som orsakar variationen och få fram storleken av denna.

Egenskapen ifråga säger att det genomsnittliga avståndet från startpunkten efter N steg i en slumpvandring är proportionell mot kvadratroten ur N. Till exempel kan man singla slant och ta ett steg framåt vid krona och ett steg bakåt vid klave. Om man upprepar försöket många gånger kommer man att upptäcka att avståndet från startpunkten i genomsnitt är proportionellt mot kvadratroten ur antalet slantsinglingar.

För O-C diagram går metoden ut på att man beräknar differensen mellan alla O-C värden på vissa avstånd från varandra. Om det är fråga om en slumpvandring bör O-C värden på längre avstånd ha en större skillnad. För att få positiva värden på alla differenser och få en rak kurva när man plottar dem är det lämpligt att kvadrera differenserna. För alla differenser på samma avstånd beräknar man sedan medelvärdet. Man beräknar alltså:

$$u(x)^2 = (O-C_{n+x} - O-C_n)^2$$

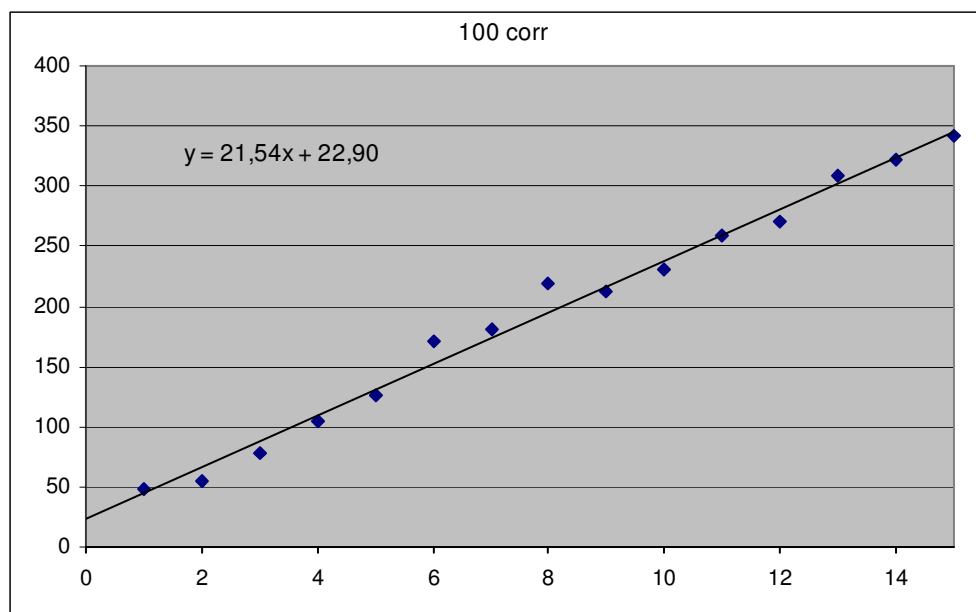
Där $O-C_n$ är det n:te O-C värdet och x i tur och ordning är 1, 2, 3 osv. för alla par av O-C värden som finns tillgängliga. Sedan beräknas medelvärdet för alla $u(1)^2$, $u(2)^2$ osv. För x större än cirka 15 har kurvorna visat sig bli mindre pålitliga. I mina O-C diagram på webben har jag valt att ha med två E/P beräkningar, den ena med x upp till 5 och den andra med x upp till 15.

Eddington och Plakidis gjorde i sin artikel vidare ett diagram där man plottade $u(x)^2$ mot x och lade in en trendlinje med ekvationen:

$$u(x)^2 = \varepsilon^2 x + 2a^2$$

Om periodvariationen är helt slumpmässig bör punkterna hamna på en relativt rät linje med lutningen ε^2 och som skär y-axeln vid $2a^2$. Eddington och Plakidis visade att ε då är storleken av den slumpmässiga variationen och a storleken av avläsningsfelet (skillnaden i tidpunkten när maximum verkligen inträffat och tidpunkten man registrerat)

Här är ett simulerat E/P diagram med x upp till 15 för en stjärna med en slumpvariation på 6 dagar, ett avläsningsfel på 4 och över 100 cykler. $\varepsilon^2 = 21,54$ och $2a^2 = 22,90$, detta ger $\varepsilon = 4,64$ och $a = 3,38$. Här ser man att ε och a fick lite lägre värden än de 6 och 4 de enligt teorin borde ha.



Eftersom det är slumpen vi har att göra med får man räkna med att utfallet kan slå rätt olika i enskilda fall och formeln för ε och a bara gäller som ett genomsnitt över många stjärnor. Men i mina simuleringar av många tusen O-C diagram såg jag att ε och a systematiskt fick ett värde som var cirka 1,25 gånger lägre än de borde ha. Jag hade ingen förklaring till detta utan bara konstaterade att för att få rätt värden på den slumpmässiga variationen (pv) och avläsningsfelet (af) får man från ett E/P diagram beräkna:

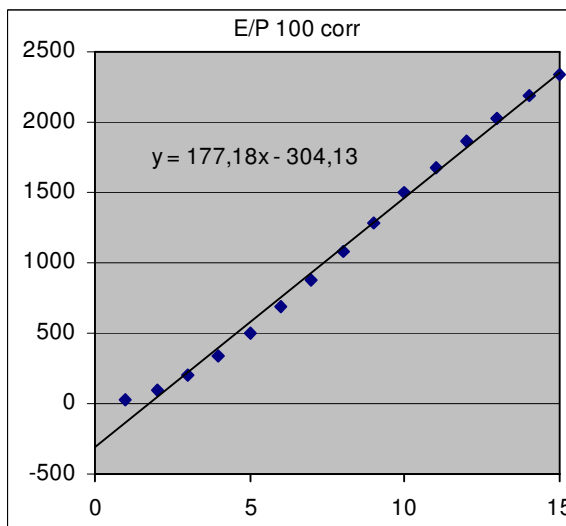
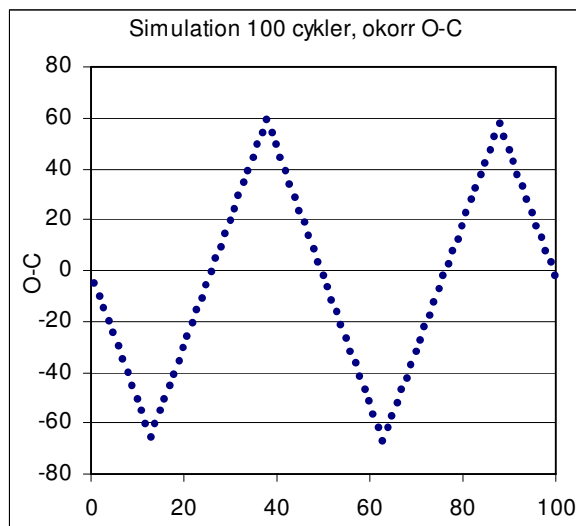
$$\begin{aligned} pv &= 1,25 * \varepsilon & \text{eller} & & pv &= 1,25 * \text{rot}(\varepsilon^2) \\ af &= 1,25 * a & \text{eller} & & af &= 1,25 * \text{rot}(2a^2 / 2) \end{aligned}$$

Där rot() är kvadratroten ur ().

Med dessa formler får man i exemplet ovan $pv = 5,80$ och $af = 4,22$, vilket är närmare de 6 och 4 som faktiskt användes i simuleringen.

Det var kul när jag i en artikel om slumpvandring, "A derivation of the mean absolute distance in one-dimensional random walk" av J. Hižak m.fl., hittade att det behövs en omvandlingsfaktor på $\text{rot}(2/\pi) = 0,7979$ att multiplicera steglängden med för att få rätt värde på slumpvandringens medelavvikelse från startpunkten. I formlerna ovan är denna faktor på andra sidan likhetstecknet så den blir $1/\text{rot}(2/\pi) = 1,2533$, vilket ju stämmer bra med mitt empiriska resultat.

Eddington/Plakidis metoden för miror med periodförändringar. E/P metoden är som jag fattat det i första hand tänkt att användas på variabelstjärnor med enbart slumpmässiga periodvariationer och för att beräkna storleken av dessa och visa att det är frågan om slumpmässiga variationer. Men vad händer med E/P diagrammet för en mira som är meandrande eller har en kontinuerlig periodförändring? Följande diagram är ett O-C diagram för en meandrande mira och dess motsvarande E/P diagram för x upp till 15.



Perioden växlar i det här exemplet mellan 295 och 305 dagar med 25 cyklers mellanrum. I E/P diagrammet läggs som vanligt en rak trendlinje in för att få ε^2 och $2a^2$ -parametrarna. Här ser man att det blir ett förbjudet värde för $2a^2$ på -304,13, det går inte att beräkna kvadratroten ur ett negativt tal. Det är inte så lätt att se på bilden, men E/P-kurvan är ungefär parabolisk.

För både meandrande och kontinuerliga periodförändringar får man ett E/P diagram med en nära parabolisk kurva som skär y-axeln nära 0, $u(x)^2$, värdena kan ju inte vara negativa. Detta innebär att en rak trendlinje alltid kommer att skära y-axeln under 0 och ge ett otillåtet värde på a. Man kan också konstatera att om E/P-kurvan är parabolisk blir det negativa värdet på $2a^2$ större (mer negativt) ju högre värde på x man använder. En parabolisk kurva böjer ju upp kraftigare för högre x och tvingar trendlinjens skärningspunkt på y-axeln nedåt.

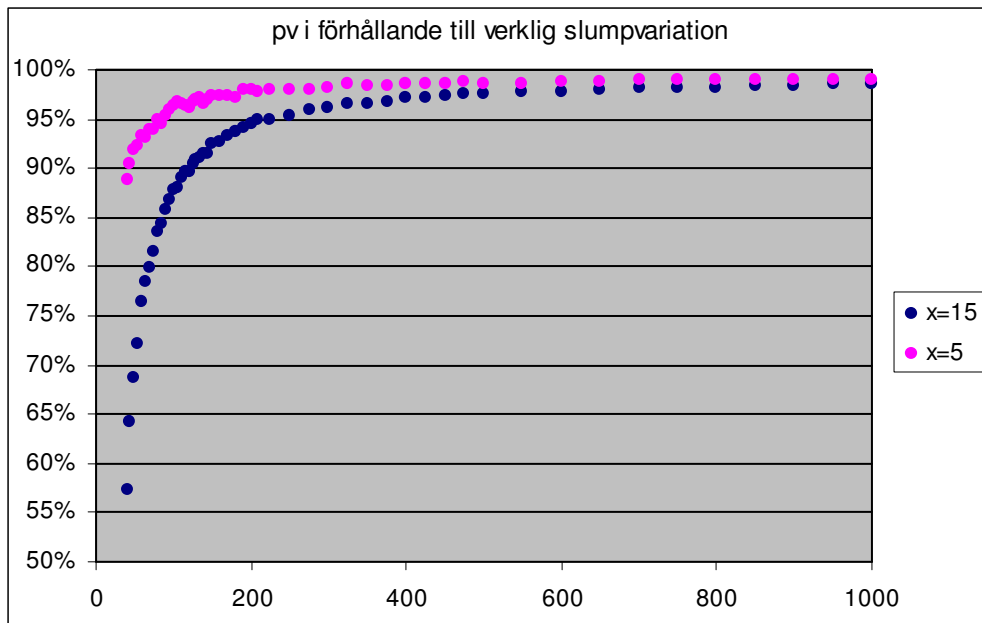
Som jag ser det är ett stort negativt värde på $2a^2$ -parametern en bra indikation på att stjärnan har någon typ av periodförändring som är större än bara slumpen. För att se om förändringen är meandrande eller kontinuerlig får man titta på O-C kurvans form. Bara för att $2a^2$ -värdet är lite negativt behöver det inte betyda att stjärnan har periodförändringar. Då antalet cykler som finns tillgängliga för en enskild stjärna är begränsat kan slumpen lätt i det enskilda fallet ge ett negativt värde även om stjärnan enbart har slumpmässiga variationer. ϵ och a från E/P-beräkningar får alltid anses som ungefärliga då underlaget för den enskilda stjärnan är begränsat och många stjärnor antagligen har en blandning av slumpmässiga och ej slumpmässiga variationer av olika slag och storlekar.

Om man tittar på $2a^2$ -värdena för alla stjärnor i min databas skulle jag säga att om värdet är mindre än -100 för E/P-beräkningar med $x=5$ och mindre än -300 för $x=15$ kan det vara stjärnor som har periodförändringar. I första hand är det meandrande miror och miror med en stor kontinuerlig förändring som kan upptäckas på detta sätt. För stjärnor med en liten kontinuerlig förändring kommer denna att drunkna i de slumpmässiga variationerna och inte ge utslag i ett stort negativt värde på $2a^2$.

Periodanpassning av O-C diagram och E/P-metoden. Tidigare i sektionen om O-C diagram beskrev jag att en normal åtgärd när man gör ett O-C diagram är att lägga in en trendlinje i diagrammet och från den beräkna en ny medelperiod som sedan används för att räkna om diagrammet. Det är rätt naturligt att man använder medelperioden då den "rätta" perioden inte går att veta. Om stjärnan inte har några periodförändringar kommer medelperioden på lång sikt att närma sig stjärnans egentliga period, men i ett kortare perspektiv kan de slumpmässiga variationerna få perioden att hoppa upp och ner.

Genom att med medelperioden anpassa diagrammet till slumpvariationen trycks O-C värdena ihop och får en mindre spridning än de egentligen har. I exemplet överst på sidan 8 ser man detta. I exemplet har O-C värdena egentligen en spridning på mellan -80 och 10, men efter korrigering med ny medelperiod har de en spridning bara mellan -30 och 25. Eftersom O-C värdena på detta sätt får en mindre spridning får också E/P-parametrarna för låga värden. Slumpvariationen är därför antagligen lite större än vad p_v ($\epsilon * 1,25$) visar.

I simuleringen vet jag vilken storlek på slumpvariationen jag använt. Genom att jämföra denna med p_v från E/P-metoden fick jag följande diagram som visar storleken på p_v jämfört med storleken på den verkliga slumpvariationen för ett antal olika cykler.



Storleken på slumpvariationen visade sig inte spela någon roll, relationen blev den samma för olika stora variationer med samma antal cykler. Antalet cykler spelar däremot stor roll, med fler cykler närmar sig pv sitt förväntade värde. Vilket maximalt värde på x man använder i E/P-metoden spelar också stor roll. I simuleringen använde jag x=5 och x=15, samma som på webbsidan med O-C diagram.

Mer om statistik, t och r^2 -mått. På webbsidan har jag med två parametrar, t och r^2 , på raderna för ΔP och $\Delta P/C$. Delta P är för övrigt vad perioden från GCVS4 har justerats med i diagrammet. Delta P per cykel är periodförändringen i dagar/cykel utifrån vad en parabolisk trendlinje i diagrammet visar. För ΔP visar ett högt t och r^2 nära 1 att perioden från GCVS4 är fel och för $\Delta P/C$ att stjärnan är en kandidat för kontinuerlig periodförändring.

R^2 kallas också determinationskoefficienten och i är regressionsanalys ett mått på hur väl värdet av en variabel kan förklaras av värdet på en annan. I ett O-C diagram hur väl O-C värdet kan kopplas till cykelnumret. R^2 kan ha ett värde mellan 0 och 1, där 0 betyder att inget samband finns (punkterna är helt utspridda) och 1 ett totalt samband (punkterna ligger perfekt längs en rät eller parabolisk linje).

T-testet eller Students t-test används inom statistiken för att bedöma sannolikheten att en hypotes är sann. I O-C diagrammet till exempel sannolikheten att en mira med en till synes ökande period (har en positiv x^2 -koefficient för en parabolisk trendlinje) verkligen har en ökande period. Med t-testet kan man då bedöma sannolikheten för att koefficienten verkligen har ett positivt värde jämfört med nollhypotesen att den i själva verket har ett negativt värde. För att få fram sannolikheten utifrån t-värdet finns det särskilda tabeller att slå i, men t-fördelningen närmar sig den vanliga normalfördelningen om man har ett stort antal punkter i undersökningen. I detta fall med O-C diagram med 50, 100 eller fler maxima kan man använda normalfördelningen. T-värdet fungerar då som sigmabegreppet (se sidan 14).

Jag tyckte dessa två mått var intressanta att ha med när jag byggde webbsidan med O-C diagram och blev överraskad över hur många stjärnor som hade höga värden på dessa parametrar och alltså med mycket stor sannolikhet skulle ha säkerställda periodförändringar. Jag har i efterhand förstått att jag inte var helt insatt i den nödvändiga förutsättningen för att på rätt sätt använda de här måtten nämligen att alla mätvärden måste vara oberoende av varandra. Detta är inte fallet i ett O-C diagram där vare maximums O-C värde bygger på det föregående. Är föregående maximums O-C 50 är det troligt att nästa maximums O-C även det ligger i närheten av 50.

Detta gör att t-testet inte kan tolkas så som det är tänkt och vanligtvis görs inom statistiken. R^2 som ett mått på hur väl en kurva följer en rät eller parabolisk kurva tror jag är relevant, men man ska inte dra några slutsatser om sannolikheter. I simuleringen har jag kunnat göra en omvänd analys och se vilket t-värde som verkligen motsvarar en viss sannolikhet. För att då komma upp till sigma 3, mer än 99,9 %, sannolikhet för att stjärnan har en kontinuerlig periodförändring behövs det ett t-värde högre än 30 till 40 istället för 3 på raden för $\Delta P/C$.

Miror med periodförändringar. Det finns flera artiklar där författarna försökt lista miror med statistiskt säkerställda periodförändringar. Förutom de åtta första i listan nedan som nog de flesta är överens om finns det olika förslag som bara delvis är överlappande. De två listorna nedan är mitt bidrag.

Första listan innehåller kandidater på miror med kontinuerlig periodförändring. Här har jag utgått från stjärnornas periodförändring utifrån deras O-C diagram och slumpvariation från E/P-testet och jämfört med sannolikhetstabellerna på sidan 14 och 15. Utifrån detta har jag uppskattat sannolikheten (Sigma) att periodförändringen är verklig. De fem första har jag inte kunnat bedöma då de har en kombination av kontinuerligt och meandrande beteende.

Den andra listan innehåller kandidater på miror som har större periodförändringar än vad slumpen borde orsaka. Listan innehåller både regelbundet meandrande miror och miror med mer oregelbundna variationer. Urvalet är gjort efter flera olika kriterier, en periodvariation större än 25 eller $2a^2$ mindre än -300 i E/P-testet, en periodvariation större än 6 % eller en stor amplitud i O-C värdena.

Miror med kontinuerlig periodförändring

Stjärna	Spann	pf	t	pv	Sigma	Period	Min	Max	Amp	%var
T UMi	148	-0,635	22	64	?	299	188	320	132	44,1%
R Hya	261	-0,588	123	31	?	424	355	494	139	32,8%
LX Cyg	87	1,565	12	110	?	487	458	586	128	26,3%
BH Cru	96	0,896	11	118	?	458	420	530	109	23,9%
R Cen	98	-0,636	33	28	?	544	502	570	68	12,4%
R Aql	193	-0,417	191	9	>4	300	270	345	75	25,0%
W Dra	164	0,225	120	7	>4	270	255	290	36	13,3%
Z Tau	89	-0,761	87	12	>4	476	445	502	57	11,9%
T Lyn	108	-0,203	28	13	3	412	398	426	29	6,9%
T Scl	260	0,030	40	6	3	203	197	209	11	5,7%
V Del	87	-0,262	27	13	3	529	518	543	25	4,8%
W Cam	159	-0,061	25	7	3	284	279	292	13	4,7%
SU Vir	209	-0,030	56	4	3	209	205	214	9	4,5%
Z Vir	163	-0,047	31	6	3	305	298	310	12	4,1%
DO Her	160	-0,048	33	3	3	214	210	218	8	3,9%
SS Her	400	-0,004	26	3	2	107	104	110	6	5,4%
BG And	97	-0,105	10	8	2	292	284	299	16	5,3%
R Nor	104	0,162	17	18	2	496	486	511	26	5,2%
RY Cep	294	0,007	26	3	2	149	147	153	6	3,8%
RT Lyr	179	0,027	24	5	2	252	249	257	8	3,1%
chi Cyg	296	0,013	32	8	2	407	403	414	11	2,8%
Y Lib	167	0,021	23	4	2	276	271	278	7	2,6%
T Phe	168	0,023	25	3	2	282	279	286	7	2,6%
RU Hya	151	-0,034	26	5	2	332	328	336	9	2,6%
UX Cyg	74	0,179	10	17	1	567	558	579	20	3,6%
R Vir	541	0,002	22	3	1	146	144	148	5	3,4%
T Oct	199	0,014	20	4	1	219	217	222	6	2,6%
R Oph	197	0,013	22	5	1	303	299	307	7	2,4%
W Pup	376	-0,003	32	1	1	120	119	122	3	2,3%

Spann: Antalet cykler mellan första och sista maximum. pf: Periodförändring i dagar/cykel. t: t-test värde för en parabolisk trendlinje i O-C diagrammet. pv: Uppskattad slumpmässig variation. Sigma: sannolikhet för periodförändring. Period: Medelperiod. Min / Max: Stjärnans högsta och lägsta period. Amp / %var: Skillnad mellan högsta och lägsta period i dagar och andel av medelperioden.

Miror med varierande eller meandrande period

Stjärna	Spann	Period	Min	Max	Amp	%var
Z Sco	148	350	339	376	37	10,4%
RU Tau	75	571	543	603	59	10,3%
S Ori	127	421	403	443	40	9,5%
Z Vel	106	420	405	438	34	8,1%
RS Aql	107	410	398	429	31	7,6%
RU Sco	126	367	351	379	28	7,5%
T CMi	167	320	309	333	24	7,5%
U CMi	121	412	396	427	30	7,4%
T Ari	165	321	309	333	24	7,4%
T Hya	205	289	281	302	21	7,4%
Y Cap	117	410	393	424	30	7,4%
X Cas	105	424	409	438	30	7,0%
R Lep	137	433	417	447	30	7,0%
T Peg	190	374	360	386	26	7,0%
S Sex	171	260	250	268	18	6,7%
CU Cyg	168	214	211	225	14	6,6%
UZ Cam	192	232	225	240	15	6,5%
T Cep	128	390	376	401	25	6,4%
T Ser	168	340	329	350	22	6,3%
RS Aqr	212	216	211	224	14	6,3%
SS Peg	101	417	402	428	26	6,1%
X Lib	288	165	160	170	10	6,0%
DF Her	133	334	325	343	18	5,3%
S Her	209	308	300	316	16	5,2%
TY Cyg	121	350	341	359	18	5,0%
U Dra	142	318	311	327	16	5,0%
VX Aur	138	325	315	331	16	5,0%
AF Car	90	442	431	451	19	4,4%
S Ser	187	368	360	375	14	3,9%
VY Aur	104	400	391	406	15	3,7%

Spann: Antalet cykler mellan första och sista maximum. Period: Medelperiod. Min / Max: Stjärnans högsta och lägsta period. Amp / %var: Skillnad mellan högsta och lägsta period i dagar och andel av medelperioden.

Thomas Karlsson
Varberg 2019-04-26

Referenser

Databasen och sidan med O-C diagram finns på: <http://var.astronet.se/mirainfooc.php>
Diagram över mirornas period över tid: <http://var.astronet.se/mirainfoper.php>
Medelljuskurvor för mirorna i databasen: <http://var.astronet.se/mirainfomax.php>
Utvidgade ljuskurvor: <http://var.astronet.se/mirainfotot.php>

AAVSO (Waagen et al. 2011), AAVSO Times of Maxima and Minima of Long Period Variables: Current data
<https://www.aavso.org/maxmin-access-current>

Eddington, A. S., Plakidis, S., 1929, MNRAS, 90, 65, Irregularities of period of long-period variable stars
http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-article_query?1929MNRAS..90...65E&data_type=PDF_HIGH&whole_paper=YES&type=PRINTER&filetype=.pdf

Hižak, Jurica et al., 2011, Tehnički glasnik, 5, 1, A derivation of the mean absolute distance in one-dimensional random walk
https://bib.irb.hr/datoteka/718277.JHizakRLogozar_ADerivationOfMeanAbsDistancIn1DRndmWalk.pdf

Karlsson, Thomas, 2013, JAVSO, 41, 348, Maxima and O-C Diagrams for 489 Mira Stars
<https://www.aavso.org/sites/default/files/jaavso/v41n2/348.pdf>

Karlsson, Thomas, 2014, JAVSO, 42, 280, Long-term Secular Changes in the Period of Mira Stars
<https://www.aavso.org/sites/default/files/jaavso/v42n2/280.pdf>

Lombard, F., Koen, C., 1993, MNRAS, 263, 309, The Analysis of Indexed Astronomical Time Series - Part Two - the O-C / Observed - Calculated / Technique Reconsidered
http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-article_query?1993MNRAS.263..309L&data_type=PDF_HIGH&whole_paper=YES&type=PRINTER&filetype=.pdf

Percy, John R., Au, Winnie W.-Y., 1999, PASP, 111, 98, Long-Term Changes in Mira Stars. II. A Search for Evolutionary Period Changes in Mira Stars
<https://iopscience.iop.org/article/10.1086/316303/pdf>

Percy, John R., Colivas, Ted, 1999, PASP, 111, 94, Long-Term Changes in Mira Stars. I. Period Fluctuations in Mira Stars
<https://iopscience.iop.org/article/10.1086/316290/pdf>

The SAO/NASA Astrophysics Data System (ADS)
<http://adsabs.harvard.edu/>

Templeton, M. R., Mattei, J. A., Willson, L. A., 2005, AJ, 130, 776, Secular Evolution in Mira Variable Pulsations
<https://iopscience.iop.org/article/10.1086/431740/pdf>

Turner, D. G. et al. 2010, OAP, 23, 129, The Onset of Chaos in Pulsating Variable Stars
<https://arxiv.org/pdf/1102.4338v1.pdf>

Vassiliadis, E., Wood, P. R., 1993, ApJ, 413, 641, Evolution of low- and intermediate-mass stars to the end of the asymptotic giant branch with mass loss
http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-article_query?1993ApJ...413..641V&data_type=PDF_HIGH&whole_paper=YES&type=PRINTER&filetype=.pdf

Willson, L. A., Marengo, M., 2012, JAVSO, 40, 516, Miras
<https://www.aavso.org/sites/default/files/jaavso/v40n1/516.pdf>

Wood, P. R., Zarro, D. M., 1981, ApJ, 247, 247, Helium-shell flashing in low-mass stars and period changes in mira variables
http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-article_query?1981ApJ...247..247W&data_type=PDF_HIGH&whole_paper=YES&type=PRINTER&filetype=.pdf

Ziljstra, Albert A., Bedding, Timothy R., 2002, JAVSO, 31, 2, Period Evolution in Mira Variables
<https://www.aavso.org/files/webpublications/ejaavso/v31n1/2.pdf>